# 数列

## 例題 2　等比数列

（ア）

別解

$a,\ b,\ c$ はこの順で等比数列をなすから $b^2=ac$

これと $abc=-27$ より，$b^3=-27$　$\therefore b=-3$

また，これより $ac=9$　・・・①

等差数列の公差を $d$ とする。

$b$ が第 1 項のとき

$(a,\ c)=(-3+d,\ -3+2d),\ (-3+2d,\ -3+d)$

これと①より，$(-3+d)(-3+2d)=9$　$\therefore d(2d-9)=0$

これと $a,\ b,\ c$ が異なる実数であることから，$d=\dfrac{9}{2}$

よって，$(a,\ c)=\left(\dfrac{3}{2},\ 6\right),\ \left(6,\ \dfrac{3}{2}\right)$

$b$ が中央項のとき

$(a,\ c)=(-3-d,\ -3+d),\ (-3+d,\ -3-d)$

これと①より，$(-3+d)(-3-d)=9$　$\therefore d=0$

これは $a,\ b,\ c$ が異なる実数であることに反する。

よって，不適

ゆえに，$(a,\ b,\ c)=\left(\dfrac{3}{2},\ -3,\ 6\right),\ \left(6,\ -3,\ \dfrac{3}{2}\right)$

補足

$b$ が第 3 項のときの等差数列は $b$ が第 1 項のときの等差数列と同じである。

## 例題 9　2 項間漸化式／$a_{n+1}=pa_n+q$

**(1)**

数列$\{f(n)\}$の漸化式を$f(n+1)=f(n)+n$とし，$a_{n+1}=2a_n+n$との差をとると，

$a_{n+1}-f(n+1)=2(a_n-f(n))$　・・・①

①より，$a_{n+1}=2a_n+f(n+1)-2f(n)$

これと$a_{n+1}=2a_n+n$より，$f(n+1)-2f(n)=n$

ここで，$f(n)=pn+q$とおくと，$p(n+1)+q-2(pn+q)=n$　$\therefore -pn+p-q=n$

これは$n$についての恒等式だから，$p=q=-1$

よって，$f(n)=-n-q$

これを①に代入することにより，$a_{n+1}-\{-(n+1)-1\}=2\{a_n-(-n-1)\}$

$\therefore a_{n+1}+(n+1)+1=2(a_n+n+1)$

これより，

$$\begin{aligned}a_n+n+1&=2^{n-1}(a_1+1+1)\\&=3\cdot 2^{n-1}\end{aligned}$$

ゆえに，$a_n=3\cdot 2^{n-1}-n-1$

**(2)**

別解の解説

数列$\{f(n)\}$の漸化式を$f(n+1)=4f(n)-2^{n+1}$とし，$a_{n+1}=4a_n-2^{n+1}$との差をとると，

$a_{n+1}-f(n+1)=4(a_n-f(n))$　・・・①

①より，$a_{n+1}=4a_n+f(n+1)-4f(n)$

これと$a_{n+1}=4a_n-2^{n+1}$より，$f(n+1)-4f(n)=-2^{n+1}$

ここで，$f(n)=p\cdot 2^n$とおくと，$p\cdot 2^{n+1}-4p\cdot 2^n=-2^{n+1}$　$\therefore p=1$

よって，$f(n)=2^n$

これを①に代入することにより，$a_{n+1}-2^{n+1}=4(a_n-2^n)$

これより，

$$\begin{aligned}a_n-2^n&=4^{n-1}(a_1-2^1)\\&=4^{n-1}(4-2)\\&=2\cdot 4^{n-1}\end{aligned}$$

ゆえに，$a_n=2\cdot 4^{n-1}+2^n$

## 例題 14　不等式と漸化式

**(2)**

**(ⅲ)**

等号は$n=1$のとき成立